14/12/2018

$L(V^n, W^m) = \{$linear map$\}$ δ.χ.

$L(V^n, W^m) = \langle F_{ij} \mid i=1,\dots,n,\ j=1,\dots,m \rangle$

$F_{ij} = V \xrightarrow{\text{γραμ.}} W \quad f_{ij}(v_t) = \begin{cases} w_j & \text{όταν } i=t \\ 0 & \text{όταν } i \neq t \end{cases}$

V τυχαίο $\rightarrow v = b_1 v_1 + \dots + b_n v_n$

$F_{ij}(v) = b_1 F_{ij}(v_1) + \dots + b_n F_{ij}(v_n) = b_i F_{ij}(v_i) = b_i w_i$

Οι F_{ij} είναι γρ. ανεξ.

Επίσης οι F_{ij} γεννούν τον χώρο. $T: V \to W$ τυχαία γραμμ. απεικ.

Κάθε γρ. απεικ. καθορίζεται από τις εικόνες των στοιχ. της βάσης

$$T(v_i) = \sum_{t=1}^{m} a_{ti} w_t \qquad i=1,\dots,n$$

Οι συντελεστές a_{ti} δημιουργούν τον πίνακα (T, S, S')

$$T(v_i) = \sum_{t=1}^{m} a_{ti} w_t = \sum_{t=1}^{m} a_{ti} F_{it}(v_i) \qquad \text{διότι } F_{it}(v_i) = w_t$$

$T(v_i) = \sum \alpha_{ti} f_{it}(v_i)$

Η εικόνα της T στο τυχαίο v

$T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} b_i v_i) = \sum_{i=1}^{n} b_i \, T(v_i) =$

$= \sum_{i=1}^{n} b_i \sum \alpha_{ti} f_{it}(v_i) =$

$= \sum \alpha_{ti} f_{it}(\sum(b_i v_i)) = \sum f_{it}(v)$

Το σύνολο $\{f_{ij} \mid i=1,\dots,n \;\; j=1,\dots,m\}$

Αποτελεί βάση του δ.χ. $L(V^n, W^m)$ και έχει διάσταση mn

π.χ. $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$M(n\times m, \mathbb{R})$ δ.χ. διάστασης $m.n$

βάση $\{M_{ij} \mid i=1,\dots,n \;\; j=1,\dots,m$ M_{ij} είναι ένας $n\times m$ πίνακας με όλα τα στοιχεία του μηδέν εκτός από το i-j το οποίο είναι μονάδα.

Υπάρχει γραμ. απεικ.

$\phi : L(V^n, W^m) \cong M(n\times m, \mathbb{R})$ όταν καθοριστούν βάσεις S και S' των V και W αντίστοιχα η οποία είναι $\cong$

Η ϕ μπορεί να οριστεί εύκολα ως εξής:

$$\phi(f_{ij}) = M_{ij}$$

$M(n\times m, \mathbb{R}) \ni A$ πίνακας.

Ο A ορίζει γρ απεικ. $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ όταν έχουμε ορίσει τις βάσεις των $\mathbb{R}^n$ και $\mathbb{R}^m$. Εδώ υποθέτουμε ότι οι βάσεις είναι οι κανονικές.

$$A = (\alpha_{ij})$$

Μια γρ απεικ. καθορίζεται από τις εικόνες της βάσης

$$\mathbb{R}^n = \langle e_1^n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n^n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

$$\mathbb{R}^m = \langle e_1^m = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2^m = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_m^m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Για λόγους ευκολίας γράφουμε τη βάση χρησιμοποιώντας στήλες

$$A e_1^n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \end{pmatrix}$$

η πρώτη στήλη του πίνακα A

Γενικά $A^{(k)}$ θα συμβολίζει την k στήλη του πίνακα A.

Αν θέλουμε γραμμές το $A_{(k)}$ θα συμβολίζει την k

γραμμή του πίνακα A.

$A e_1^n = A^{(1)}$
$A e_2^n = A^{(2)}$
$\vdots$
$A e_n^n = A^{(n)}$

$\operatorname{Im} A = \langle A e_1^n, A e_2^n, \dots, A e_n^n \rangle$ όχι απαραίτητα βάση

$= \langle A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)} \rangle$

$\dim \operatorname{Im} A = \dim \mathbb{R}^n - \dim \ker A = n - \dim \ker A$

$\shortparallel$

Είναι ο αριθμός των γρ. ανεξ. στηλών του A
= Είναι η βαθμίδα του A.

Τυχαίο στον $\mathbb{R}^n$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 e_1^n + x_2 e_2^n + \dots + x_n e_n^n$

$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A (x_1 e_1^n + x_2 e_2^n + \dots + x_n e_n^n) = x_1 A e_1^n + x_2 A e_2^n + \dots + x_n A e_n^n =$

$= x_1 A^{(1)} + x_2 A^{(2)} + \dots + x_n A^{(n)}$

Η εικόνα του τυχαίου είναι γρ. συνδ. των στηλών του A.

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\dots&\alpha_{mn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\dots+\alpha_{1n}x_n\\\vdots\\\alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\dots+\alpha_{mn}x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$$

Σύστημα.

$$A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=x_1A^{(1)}+\dots+x_nA^{(n)}$$

Θέλουμε $A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}\Rightarrow x_1A^{(1)}+x_2A^{(2)}+\dots+x_nA^{(n)}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}$

Αυτό μας λέει ότι το $\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$ είναι γρ. συνδ. των στηλών του πίνακα.

Δηλαδή $\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}\in \operatorname{Im}A \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix}c_1\\\vdots\\c_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$ ώστε το $\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}=$

$=c_1A^{(1)}+c_2A^{(2)}+\dots+c_nA^{(n)}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}b_1\\\vdots\\b_m\end{pmatrix}$ είναι γρ. συνδ. των στηλών του $A\Leftrightarrow \operatorname{rank}(A^{(1)}\,A^{(2)}\dots A^{(n)}\;b)=\operatorname{rank}A$, $m\times(n+1)$ πίνακας ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος. $\boxed{++}$

Θεώρημα: Έστω ένας $m \times n$ πίνακας A και το σύστημα $Ax = b$ με $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ και $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$. Το σύστημα αυτό θα έχει λύση αν-ν το b είναι γρ. συνδ. των στηλών του A αν-ν rank επαυξ. $= \text{rank} A$.

Ας υποθ. ότι το σύστημα $Ax = b$ έχει λύση.
Ερώτημα: Είναι μοναδική η λύση; Από τι εξαρτάται;

Ας θεωρήσουμε το ομογενές σύστημα:
Δηλαδή $b = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{0}$

$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. Προφανώς έχει λύση την μηδενική.

Εκτός από την μηδενική έχει άλλες;

Ναι αν έχει πυρήνα $\text{Ker} A \supsetneq \{\bar{0}\}$
$\Leftrightarrow$ η απεικ. A δεν θα είναι 1-1
$\Leftrightarrow \dim \text{Ker} A \geq 1 \Leftrightarrow n - \dim \text{Im} A \geq 1 \Leftrightarrow n - \text{rank} A \geq 1$.

Πρόταση α) Το ομογενές σύστημα
$Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ έχει μοναδική λύση αν-ν $\dim \text{Ker} A = 0 \Leftrightarrow n = \text{Im} A = \text{rank} A$

β) Ο χώρος των λύσεων του ομογενούς συστήματος $Ax = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ είναι πυρήνας του A και η διάσταση ισούται με $n - \text{rank} A$

Έστω ότι μια λύση του $Ax=b$ είναι η $\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$, δηλαδή

$$A\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}=b \quad (+)$$

Έστω ότι το ομογενές $Ax=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$ έχει σαν λύση την $\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}$ δηλαδή: ~~υποθ. ότι το σύστημα $Ax=b$ έχει~~

$$A\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \quad (++)$$

$$A \qquad \begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+d_1\\ \vdots\\ c_n+d_n\end{pmatrix}$$

Ας υποθ. ότι το σύστημα $Ax=b$ έχει λύση.

Ερώτηση: Αν μοναδική λύση; Από τι εξαρτάται;

$$A\left(\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}\right)=A\cdot\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}d_1\\ \vdots\\ d_n\end{pmatrix}\overset{(+)}{=}b+\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=b.$$

Θεώρημα: Έστω το σύστημα $Ax=b$ και $\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ μια λύση αυτού. Κάθε άλλη λύση του $Ax=b$ δίνεται από το άθροισμα του $\begin{pmatrix}c_1\\ \vdots\\ c_n\end{pmatrix}$ με ένα στοιχ. του $\ker A$.

Όλες οι λύσεις του συστήματος δίνονται με αυτόν τον τρόπο.

Έστω $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in \ker A \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \bar{0}$

Τότε $A\left(\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}\right) = A\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = b + \bar{0} = b$

Άρα και το $\begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ \vdots \\ c_n + d_n \end{pmatrix}$ αποτελεί λύση του συστήματος.

Έστω $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ και $\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$ δύο λύσεις του $Ax = b$ Δηλαδή

$$A\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = b = A\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix}$$

$$\bar{0} = b - b = A\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} - A\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} c_1' - c_1 \\ \vdots \\ c_n' - c_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$\begin{pmatrix} c_1' - c_1 \\ \vdots \\ c_n' - c_n \end{pmatrix} \in \ker A$. Άρα θα $\exists$ διάνυσμα $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \in \ker A$

ώστε $\begin{pmatrix} c_1' - c_1 \\ \vdots \\ c_n' - c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\begin{pmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ Άρα όλες οι λύσεις του $Ax = b$ θα δίνονται από μια συγκεκριμένη λύση συν ένα στοιχ. του $\ker A$.

Δηλαδή ο χώρος των λύσεων του $Ax = b$ είναι το σύνολο $\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \ker A = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \right.$ όπου $\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}$ είναι

στοιχείο του $\ker A \}$

Πόρισμα: Δίνεται το σύστημα $Ax=b$ το σύστημα έχει μοναδική λύση όταν $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A,b)$ και $\dim \ker = 0$ $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank}(A,b)$ και $n = \operatorname{rank} A$.